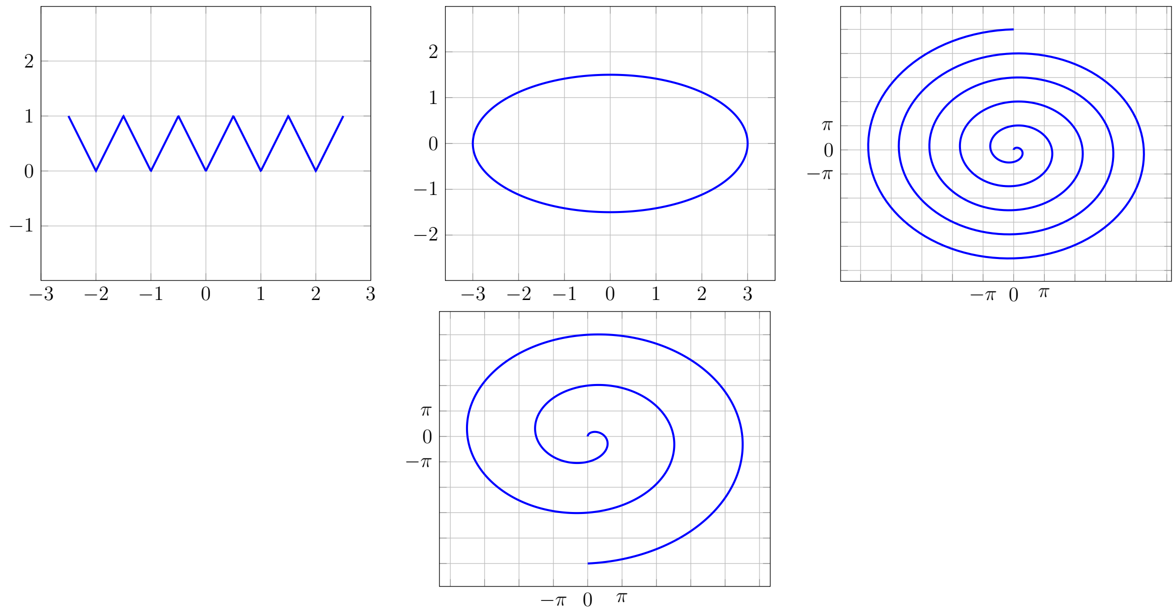
Étude de courbes paramétrées et calculs de longueurs

Les exercices ou les questions marqués d'une étoile ne sont pas prioritaires.

1 Tracer des courbes paramétrées simples

Exercice 1. Déterminer une paramétrisation des courbes suivantes



Exercice 2. Déterminer une paramétrisation de la droite Δ' projettée orthogonale de la droite Δ d'équation :

$$\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = 2 \end{cases}$$

dans le plan P d'équation $x + y + z = 1$.

Exercice 3. Tracer, puis déterminer une paramétrisation (en coordonnées cartésiennes) des courbes du plan décrites en coordonnées polaires par

1. $r = \frac{1}{2\cos(\theta)+3\sin(\theta)}$,
2. $r = 4\cos(\theta)$.

2 Étude de courbes paramétrées

Exercice 4. Soit la courbe paramétrée $\Gamma = (\mathbb{R}, \phi)$ définie par $\phi(t) = \begin{cases} x(t) = t - \tanh t \\ y(t) = \frac{1}{\cosh t} \end{cases}$ pour $t \in \mathbb{R}$

1. Étudier la parité des fonctions $x(\cdot)$ et $y(\cdot)$. Quelle(s) symétrie(s) cela implique-t-il sur le support de la courbe Γ ? Peut on réduire le domaine d'étude ?

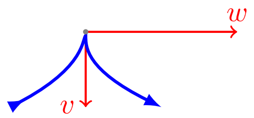
   On a $x(-t) = -t - \tanh(-t) = -(t - \tanh(t)) = -x(t)$ et $y(-t) = 1/\cosh(-t) = 1/cosh(t) = y(t)$. Ainsi, on remarque que le support de la courbe Γ admet une symétrie axiale par rapport à l'axe Oy.

2. Calculer ϕ', ϕ'' (on donne $\phi'''(t) = \begin{pmatrix} 2(1-2\sinh^2 t)/\cosh^4 t \\ (5\tanh t - 6\tanh^3 t)/\cosh t \end{pmatrix}$) et déterminer si Γ à un/des point(s) stationnaire(s).

   On a $\phi'(t) = \begin{pmatrix} 1 - 1/\cosh^2 t \\ -\sinh t/\cosh^2 t \end{pmatrix}$ et On a $\phi''(t) = \begin{pmatrix} 2\sinh t/\cosh^3 t \\ (2\sinh^2 t - \cosh^2 t)/\cosh^3 t \end{pmatrix}$ L'unique point stationnaire ($\phi'(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$) est en $t = 0$.

3. On se place en $t = 0$: donner la nature du point $\phi(0)$ ainsi que le comportement local de la courbe (faire un petit dessin).

   On a $\phi''(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\phi'''(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Autrement dit, avec les notations du cours : on a $p = 2$ et $q = 3$. C'est donc un point de rebroussement de 1ère espèce admettant une tangente verticale :



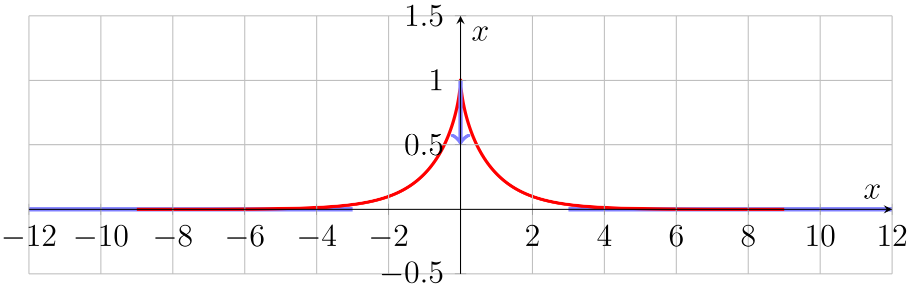
4. On se place au voisinage de $t = +\infty$. Étudier la branche infinie (asymptote et position relative).

   On a $\lim_{t\to+\infty} x(t) = +\infty$ et $\lim_{t\to+\infty} y(t) = 0$. La courbe Γ admet dont une asymptote horizontale en $t = +\infty$. De plus, on a $y(t) > 0$ et Γ est située au dessus de son asymptote.

5. Faire le tableau de variations de Γ.

t	$-\infty$		0		∞
signe de $x'(t)$		$+$	0	$+$	
variation de $x(t)$		$\nearrow$		$\nearrow$	
signe de $y'(t)$		$+$	0	-	
variation de $y(t)$		$\nearrow$		$\searrow$	

6. Tracer la courbe Γ ainsi que les tangentes et asymptotes étudiées aux questions précédentes.



center

Exercice 5. (La deltoïde) Soit la courbe paramétrée Γ définie par $\begin{cases} x(t) = 2\cos t + \cos 2t \\ y(t) = 2\sin t - \sin 2t \end{cases}$ pour $t \in [-\pi, \pi]$

1. Étudier la parité des fonctions $x(\cdot)$ et $y(\cdot)$. Quelle(s) symétrie(s) cela implique-t-il sur le support de la courbe Γ ?

   On a $x(-t) = 2\cos(-t) + \cos(-2t) = 2\cos(t) + \cos(2t) = x(t)$ et la fonction x est paire. De même, $y(-t) = 2\sin(-t) - \sin(-2t) = -2\sin t + \sin 2t = -y(t)$ et la fonction y est impaire. Cela donne une symétrie axiale par rapport à l'axe des abscisses.

2. Calculer Γ', Γ'' et Γ'''.

   On a

$$\Gamma'(t) = \begin{cases} x'(t) = -2\sin t - 2\sin 2t \\ y'(t) = 2\cos t - 2\cos 2t \end{cases}$$
$$\Gamma''(t) = \begin{cases} x''(t) = -2\cos t - 4\cos 2t \\ y''(t) = -2\sin t + 4\sin 2t \end{cases}$$
$$\Gamma'''(t) = \begin{cases} x'''(t) = 2\sin t + 8\sin 2t \\ y'''(t) = -2\cos t + 8\cos 2t \end{cases}$$

3. Soit $t \in [-\pi, \pi[$. Montrer que $\cos(t) - \cos(2t) = 0$ a trois solutions $t = 0$ et $t = 2\pi/3$ et $t = -2\pi/3$.

   Une solution consiste à se souvenir que $\cos 2t = 2\cos^2 t - 1$. Ansi,

$$\begin{aligned} &\cos t - \cos 2t = 0 \\ \Leftrightarrow\ &\cos t - 2\cos^2 t + 1 = 0 \end{aligned}$$

   On cherchant les racines du polynôme de degré deux, $X \mapsto -2X^2 + X + 1$, on arrive à $\cos t = -1/2$ ou $\cos t = 1$. Ce qui donne le résultat escompté (faire un dessin avec un cercle trigonométrique !).

4. Calculer la position des points stationnaires. Donner leur nature ainsi que le comportement local de la courbe en leur voisinage (faire un petit dessin à chaque fois).

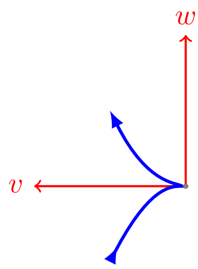
   La question précédentes donne les temps en lesquels x' s'annule. Reste à vérifier si y' s'annule aussi en ces temps. C'est bien le cas, on a

$$y'(0) = y'(2\pi/3) = y'(-2\pi/3) = 0$$

   Il y a donc 3 points stationnaires en $t = -2\pi/3, 0, 2\pi/3$.
   Étude des points stationnaires :
   (a) $t = 0$ on a $\Gamma(0) = \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, $\Gamma''(0) = \left(\begin{smallmatrix} -6 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ et $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 6 \end{smallmatrix}\right)$. Cela donne le DL suivant,

$$\Gamma(0 + h) = \begin{pmatrix} 3-3h^2+o(|h|^3) \\ h^3+o(|h|^3) \end{pmatrix}$$

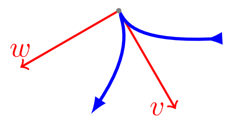
   Avec les notations du cours on a $p = 2$ et $q = 3$. Ainsi, c'est un point de rebroussement de première espèce.



(b) $t = 2\pi/3$ on a $\Gamma(2\pi/3) = \binom{-3/2}{3\sqrt{3}/2}$, $\Gamma''(0) = \binom{3}{-3\sqrt{3}}$ et $\binom{-3\sqrt{3}}{-3}$. Cela donne le DL suivant,

$$\Gamma(0+h) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -3+3h^2-\sqrt{3}h^3o(|h|^3) \\ 3\sqrt{3}-3\sqrt{3}h^2-h^3+o(|h|^3) \end{pmatrix}$$

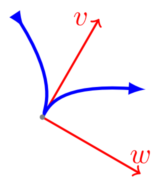
Avec les notations du cours on a $p = 2$ et $q = 3$. Ainsi, c'est un point de rebroussement de première espèce.



(c) $t = -2\pi/3$. C'est l'image par la symétrie axiale du point traité en (b). On a donc : $\Gamma(-2\pi/3) = \binom{-3/2}{-3\sqrt{3}/2}$, $\Gamma''(0) = \binom{3}{3\sqrt{3}}$ et $\binom{-3\sqrt{3}}{3}$. Cela donne le DL suivant,

$$\Gamma(0+h) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -3+3h^2-\sqrt{3}h^3o(|h|^3) \\ -3\sqrt{3}+3\sqrt{3}h^2+h^3+o(|h|^3) \end{pmatrix}$$

Avec les notations du cours on a $p = 2$ et $q = 3$. Ainsi, c'est un point de rebroussement de première espèce.



5. Calculer les tangentes aux points stationnaires et montrer qu'elles s'intersectent toutes en un même et unique point.

   Il suffit de calculer le point d'intersection de deux des tangentes et de vérifier que la troisème passe bien par ce même point.

   Comme la tangente au point $\Gamma(0)$ est l'axe des abscisses, il suffit de calculer où les 2 autres tangentes coupent cet axe. Par exemple, la tangente au point $\Gamma(2\pi/3)$ est

$$t \mapsto 3/2\binom{-1}{\sqrt{3}} + 3t\binom{1}{-\sqrt{3}}$$

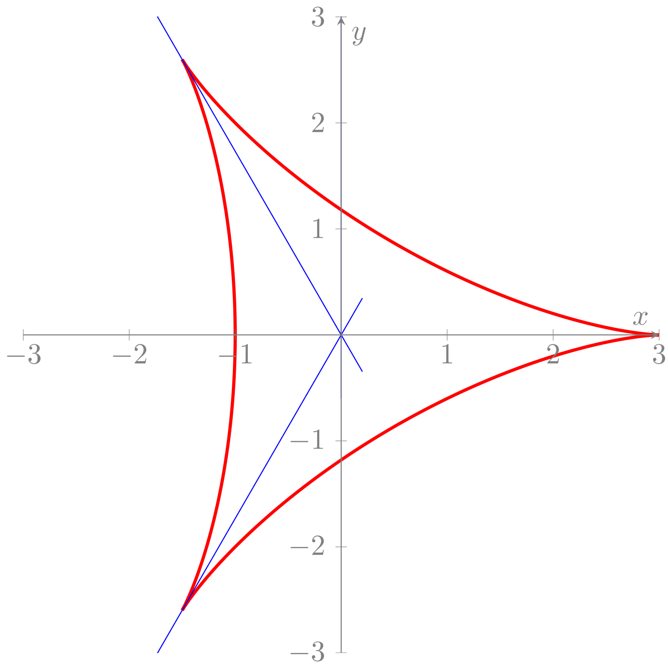
   Elle annule sa deuxième coordonnée en $t = 1/2$ en passant par l'origine. Par symétrie, on vérifie immédiatement que la troisième tangente passe elle aussi par l'origine.

6. Faire le tableau de variations associé à Γ.

   On utilise les propriétés de parité de x et de y !

t	$-\pi$		$-2\pi/3$		0		$2\pi/3$		π
signe de $x'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
variation de $x(t)$	-1	$\searrow$	$-3/2$	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-3/2$	$\nearrow$	-1
signe de $y'(t)$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0
variation de $y(t)$	0	$\searrow$	$-3\sqrt{3}/2$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$3\sqrt{3}/2$	$\searrow$	0

7. Sur le graphique suivant, tracer la courbe Γ ainsi que les tangentes étudiées aux questions précédentes. *Indication : on commencera par tracer les tangentes aux points stationnaires (ces points apparaissent déjà sur le graphique).*



8. La courbe $(\Gamma, [-\pi, \pi[)$ est-elle paramétrée par l'abscisse curviligne ?

   Non, car la norme de son vecteur dérivée n'est pas constante. En effet, $\|\Gamma'\|^2 = 8(1-\cos(3t)) = 16\sin^2(3t/2)$ pour tout $t \in]-\pi, \pi]$.

9. Montrer que la longueur de Γ est 16.

$$L = 4\int_{-\pi}^{\pi} |\sin(3t/2)|\, dt = 12\int_0^{2\pi/3} \sin(3t/2)dt = 8\int_0^{\pi} \sin(t)dt = 8\,[\cos(t)]_{t=0}^{\pi} = 16.$$

Exercice 6.* On se place dans le plan euclidien rapporté à un repère orthonormé $(O; i, j)$. Étant donné un réel $\alpha > 0$, on note Γ la courbe paramétrée $\phi : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$\phi_\alpha(t) = (1 + \alpha\cos t, \tan t + \alpha \sin t)$$

1. Étude des points stationnaires :
   (a) Dans le cas $\alpha = 1$, étudier les points stationnaires éventuels de la courbe Γ et, pour chacun, donner (en justifiant les calculs) sa nature et l'allure locale de Γ au voisinage.
   (b) Montrer qu'il n'y a pas de point stationnaire pour $\alpha \in]0,1[\cup]1,+\infty[$.
2. Tangentes : discuter, suivant α, le nombre (et la position) des points de Γ admettant une tangente horizontale ou verticale.
3. Un cas particulier : Dans le cas où $\alpha = 8$, étudier la courbe Γ (symétries, variations, étude asymptotique, représentation graphique. . .).
4. Donner l'allure de Γ dans les cas où $\alpha \in]0,1[$, $\alpha = 1$ et $\alpha > 1$.

3 Calculer des longueurs

Exercice 7. Tracer le support et calculer la longueur L des courbes Γ dans chacun des cas suivants :

1. Γ est l'*astroïde* de représentation paramétrique $t \mapsto \begin{pmatrix} \cos^3 t \\ \sin^3 t \end{pmatrix} a$ où $t \in [-\pi, \pi]$ et $a > 0$ donné.

2.* Γ est l'*arche de cycloïde* de représentation paramétrique $t \mapsto \begin{pmatrix} t - \sin t \\ 1 - \cos t \end{pmatrix} R$, où $t \in [0, 2\pi]$ et $R > 0$ donné.

3. Γ est la *cardioïde* d'équation polaire $t \mapsto \begin{pmatrix} r(t) \\ \theta(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(1 + \cos t) \\ t \end{pmatrix}$ où $t \in [-\pi, \pi]$ et $a > 0$ donné.